Exercice 4 — 25 min — 5 pt

Soit f la fonction définie sur IR par : $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité 4 cm).

1°) Etudier les variations de f et tracer C_f.

2°) Soit G la fonction définie par $G(x)=\int_0^x \dfrac{1}{1+t^2}dt$.

Montrer que G est dérivable sur IR et calculer $G'(x)$.

3°) Soit H la fonction définie sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ par $H(x)=G(\tan x)$.

a) Montrer que $H'(x)=1$, en déduire $H(x)$ pour tout $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$.

b) Montrer alors que $I=\int_0^1 \dfrac{1}{1+t^2}dt=\dfrac{\pi}{4}$ puis calculer $\int_0^{\sqrt{3}} \dfrac{1}{1+t^2}dt$.

Exercice 5 — 25 min — 5 pt

On considère une fonction f continue sur $[0,+\infty[$ dont le tableau de variation est le suivant :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
f	1	↘	$\frac{1}{2}$	↗	1

1°) Utiliser le tableau de variation pour répondre aux questions suivantes :

a) Trouver un encadrement de f sur $[0,+\infty[$.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{f(x)-1}$.

2°) Soit h la restriction de la fonction f à l'intervalle $[0,1]$.

a) Montrer que h réalise une bijection de $[0;1]$ sur un intervalle que l'on précisera.

b) Etudier la dérivabilité de h^{-1} sur $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$.

www.takiacademy.com